M.C. Escher. Superficie increspata. Collezione Giudiceandrea

(Appunti per la conferenza del 1991- 02 - 21, all'Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e Lettere, nel ciclo *Scienza e vita nel mondo attuale*. Conferenza non pubblicata.
Appunti reimpaginati giugno 2013.)

I - IL PROBLEMA DEL CONTINUO NELLA GEOMETRIA CLASSICA

1 - Si potrebbe dire che il problema del continuo geometrico è nato con la geometria stessa: il primo teorema che l'umanità abbia conosciuto, e precisamente la proposizione che va sotto il nome di teorema di Pitagora, coinvolge, con le sue conseguenze, anche la struttura di quello che è stato da molti considerato come l'oggetto della geometria, cioè il cosiddetto “spazio geometrico”. Infatti dal teorema di Pitagora si deduce l’esistenza di coppie di segmenti incommensurabili tra loro, come il lato e la diagonale del medesimo quadrato; e da qui si deduce facilmente la non esistenza di un atomo, di un grano, di un “quanto” di quello spazio geometrico di cui si diceva. In altre parole, questo risulta indefinitamente divisibile, senza che si possa giungere ad un suo elemento costitutivo, un suo “atomo”; e tale indefinita divisibilità sarà oggetto di meditazioni nei secoli successivi, in particolare quando si cercherà di precisare il concetto di continuità e di esprimerlo in forma rigorosa. Questa peculiarità del presunto oggetto della geometria pare che abbia suscitato, anche all'epoca di Pitagora, varie perplessità e polemiche, che hanno attirato l'attenzione degli storici e dei cacciatori di curiosità storiche. Tra le varie proposizioni di questo tipo abbiamo addirittura potuto leggere che Pitagora è stato perseguitato dai sacerdoti suoi contemporanei, perché con il suo teorema aveva dimostrato che Dio non esiste.

2 - La proposizione di Pitagora non è la sola che abbia richiamato l'attenzione dei pensatori: sono rimaste celebri infatti, nella storia della filosofia, le proposizioni paradossali che hanno attinenza con lo spazio e in particolare quelle, portate alla luce dalla filosofia eleatica, che vanno sotto il nome di paradosso del moto e di paradosso di Achille.
Una enunciazione del primo paradosso vorrebbe che una freccia non possa mai raggiungere il proprio bersaglio, e ciò sotto la forza della seguente argomentazione: la freccia per giungere al bersaglio deve giungere prima a metà del cammino, e poi deve raggiungere la metà del cammino rimanente, e poi ancora la metà del cammino rimanente e così via, all'infinito; quindi la freccia non raggiungerà mai il bersaglio; analogamente il paradosso del piè veloce Achille che insegue la tartaruga viene enunciato osservando che, mentre Achille copre la distanza tra il suo punto di partenza e quello della tartaruga, quest'ultima si è spostata; pertanto, quando Achille giunge nel punto in cui inizialmente era la

tartaruga, questa non si trova più in quel posto, ed il problema dell'inseguimento si ripropone, e così via, all'infinito.

Queste proposizioni, ed altre che ad esse si riattaccano, hanno stimolato per secoli la riflessione di molti scienziati e filosofi; il fare la rassegna di tutte le argomentazioni che sono state svolte durante tutta la storia del pensiero umano e riguardano questi argomenti è un'impresa quasi disperata, che non intraprendiamo qui. Ci limitiamo quindi ad osservare che questa problematica, posta dalla filosofia greca, è molto profonda, perché raggiunge i fondamenti stessi della nostra capacità di argomentare e di ragionare in forma rigorosa. Infatti l'evoluzione critica della matematica, avvenuta nel secolo scorso e tuttora in atto, ha mostrato chiaramente come il problema del continuo sia strettamente legato a quello dell'infinito, o in particolare, al significato ed alla validità degli algoritmi infiniti. E questo appunto era il punto fondamentale delle critiche che gli Eleati elevavano ai concetti fondamentali della geometria; tra gli altri, al concetto di moto, ed in particolare a quello di movimento rigido, che - come vedremo - è alla base della costruzione euclidea della geometria.

Del resto è stato osservato che il ricorso a procedure infinite si incontra anche in altri passi dell'opera euclidea. Per esempio Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, a proposito della definizione di rapporto tra due grandezze che si incontra nel libro V degli "Elementi" di Euclide, scrivono: "Occorrono concettualmente infinite verifiche di concordanze di segni: Eudosso <al quale viene attribuita la costruzione della teoria delle proporzioni> non ha potuto evitare, escludere, l'infinito nel determinare (o definire) il rapporto tra due grandezze incommensurabili: lo ha però imbrigliato, nel senso che ha ideato un procedimento, contenuto in uno schema fisso invariabile".

3 - Come abbiamo detto, ritorneremo in seguito a considerare il problema dell'infinito matematico in relazione al continuo geometrico; qui vorremmo soltanto aggiungere che la critica eleatica ha messo in luce, a nostro parere, anche un altro problema che verrà delucidato dalla evoluzione logica della matematica del secolo XIX; precisamente il fatto che un medesimo oggetto matematico possa essere considerato da diversi punti di vista, e quindi possa dare luogo a diverse teorizzazioni; nel caso in esame, per esempio, il continuo lineare, per esempio la retta, può essere visto secondo la mentalità euclidea, per la quale i segmenti sono degli oggetti ben determinati, che possono essere spostati, confrontati, sommati ecc., oppure possono dar luogo ad una analisi che ne ricerchi quelli che sono, per così dire, i loro elementi. Analisi che necessariamente sfocia nella problematica relativa all'infinito.

4 - Abbiamo considerato brevemente la problematica della geometria greca in relazione alla questione del continuo geometrico; la critica successiva ha messo in luce altre questioni, riguardanti l'opera di Euclide, che coinvolgono direttamente il problema della continuità; questioni di cui dovremo brevemente occuparci qui, per poter comprendere appieno gli apporti della critica successiva, anche relativamente recente.

La prima questione riguarda l'esistenza di punti, che si ottengono come risultati di costruzioni, ma la cui esistenza non si deduce per dimostrazione da alcuna delle proposizioni precedenti. Il primo (ma non l'unico) caso in cui tale questione si presenta viene incontrato nella proposizione prima del libro primo, laddove viene costruito il triangolo equilatero. Nella procedura relativa si prende in considerazione il punto di intersezione di due circonferenze, ognuna delle quali ha dei punti interni e dei punti esterni all'altra.

La critica recente (CITARE HEATH NEI PUNTI IN CUI TALE OSSERVAZIONE È FATTA) ha rilevato in questo punto una lacuna, perché la esistenza di tali punti (come si è detto) non risulta da alcuna proposizione precedente. Si desume da qui che per la mentalità della geometria greca, ed in particolare di Euclide, il disegno immaginato, e la costruzione eseguita erano garanzie sufficienti della esistenza degli enti di cui si tratta. In altre parole, si potrebbe dire che, per Euclide, la costruzione materiale (anche soltanto immaginata) degli oggetti della geometria non suscitava obiezioni; il che potrebbe anche essere presentato dicendo che nella mentalità euclidea le operazioni che vengono effettuate mediante movimento rigido continuo fanno parte del patrimonio di nozioni comuni che vengono ritenute valide senza ulteriore prova.

È superfluo osservare quanta parte abbia l'immaginazione nella costruzione di questi concetti: è noto infatti che l'antichità classica non ignorava la esistenza di teorie atomistiche, che presentavano la materia come costituita da atomi indivisibili; come conseguenza, le stesse teorie dovevano riguardare al concetto di continuo geometrico come il risultato della nostra immaginazione, che colma le lacune effettivamente esistenti negli oggetti, anche se impercettibili ai nostri sensi. Si direbbe che questa problematica non ha fatto presa su Euclide, così come non ha influito sulla geometria successiva, che prende ovviamente i suoi contenuti idealizzandoli dalle esperienze sensibili, accettando quindi il continuo come un dato che non viene ulteriormente analizzato.

5 - Un secondo punto dell'opera euclidea nel quale è dato di rilevare una lacuna si incontra nel libro V, e precisamente nella proposizione 17, in cui viene dimostrata la proprietà delle proporzioni che viene abitualmente richiamata con l'espressione "Regola del dividendo". Si potrebbe dire, con linguaggio moderno, che in questo ambito le considerazioni di Euclide riguardano il concetto generale di grandezza, e le operazioni sulle grandezze. A questo proposito è stato osservato che la dimostrazione euclidea si basa sulla ipotesi che esista una grandezza che è la quarta proporzionale dopo tre grandezze date. È noto che la costruzione di una grandezza cosiffatta può essere data quando si tratti di segmenti, ma risulta non eseguibile in generale, con gli strumenti ed i mezzi che sono implicitamente accettati nella trattazione

euclidea.

Fra i tentativi che vennero fatti per colmare questa lacuna nell'opera di Euclide, ricorderemo quello di Girolamo Saccheri e di Augusto De Morgan. Nel caso di Saccheri è noto che di solito si ricorda l'opera del geniale gesuita pavese per il tentativo di colmare il "neo" della proposizione riguardante la parallela; ma è interessante osservare che egli, nella stessa opera, si incarica di cancellare anche il neo riguardante la esistenza della grandezza quarta proporzionale dopo tre date; e lo fa ricorrendo a considerazioni che si basano sostanzialmente su proposizioni di continuità, ed utilizzando questa proprietà come ce la presenta l'immaginazione e pertanto svolgendo delle argomentazioni che alla nostra mentalità risultano inconcludenti.

Nel caso di De Morgan invece l'immaginazione fonda un equivoco di altro tipo: invero questo Autore si preoccupa di garantire la esistenza della grandezza che lo interessa accettando che una grandezza, quando passa crescendo da un valore ad un altro deve prendere tutti i valori intermedi; tra i quali vi è appunto, secondo l'Autore, quello di cui gli interessa dimostrare l'esistenza. Si tratta ovviamente di una petizione di principio, che a nostro parere è spiegabile con l'invadenza dell'immaginazione, la quale spesso induce in errore anche autori che in altre occasioni danno prova di essere capaci di grande sottigliezza.

6 - Occorre dire che tutta la geometria greca ha manifestato di non rendersi conto della problematica di esistenza, che si incontra nei problemi or ora ricordati ed in altri. Ci limitiamo a ricordare che Archimede, nella misura dell'area del cerchio, non si pone il problema se abbia senso parlare di questa grandezza, cioè se abbia addirittura senso parlare di quest'area; ma semplicemente affronta il problema di determinarla; analoga posizione egli prende nel caso della quadratura del segmento di parabola, ed in generale quando egli applica il procedimento ingegnosissimo di esaustione. Tuttavia è ben noto, dalle recenti scoperte sull'opera sul Metodo di Archimede, che egli si servì di procedimenti euristici, che lo portarono a calcoli analoghi a quelli che noi oggi eseguiamo con l'operazione del calcolo di un integrale definito. Precisamente sappiamo che egli immaginò il segmento di parabola diviso in fettine sottilissime, che egli somma per trovare il valore dell'area della figura a contorno curvilineo, eseguendo poi il passaggio al limite. Tuttavia il procedimento pare sia stato da lui adottato soltanto in sede di ricerca e di invenzione, che cioè sia stato considerato da lui come avente carattere tipicamente euristico; ma egli si premurò di dimostrare la validità dei risultati con dimostrazioni per esaustione. Analoga posizione viene assunta, come è noto, da Blaise Pascal circa venti secoli dopo; infatti egli afferma (nell'opera sulla cicloide, da lui chiamata “roulette”) di utilizzare il linguaggio degli indivisibili, con una posizione intuitiva quindi analoga a quella di Archimede; ma egli aggiunge che la certezza della validità dei risultati gli è data soltanto dalle dimostrazioni rigorose per esaustione, tipiche della geometria classica.

Analoghe osservazioni si possono fare a proposito delle soluzioni che i greci diedero di certi problemi immaginando che si potessero tracciare delle curve che intersecate con rette opportune, permettano di determinarne la soluzione, come è il caso della cissoide di Diocle o della quadratrice di Ippia; ovviamente essi non pongono il problema della esistenza delle soluzioni; il che ci fa pensare che, come abbiamo detto, la costruzione eseguita o immaginata costituisce per loro anche l'accertamento dell'esistenza degli elementi geometrici considerati.

7 - Si potrebbe quindi dire che la matematica greca in certo senso non ha manifestato interesse al problema del continuo geometrico, così come noi oggi lo consideriamo. Ciò non ha tuttavia impedito alla filosofia greca di prendere coscienza del problema e di cercarne (in qualche modo) le soluzioni; il che può essere indizio del fatto che la filosofia greca era profondamente interessata al problema della certezza della conoscenza, certezza di cui la matematica appare essere uno strumento validissimo. E d'altra parte la matematica si presentava anche come strumento di conoscenza della Natura; ed in particolare la geometria poteva assumere l'aspetto di “primo capitolo della fisica” (secondo l'arguta espressione di F. Enriques), cioè come il primo passo verso la determinazione razionale dei nostri rapporti con il mondo materiale, sia pure idealizzato attraverso i procedimenti della geometria. Abbiamo visto che la filosofia eleatica aveva posto dei problemi sul continuo e sull'infinito, presentandoli come problemi di geometria e di cinematica. Aristotele prese in considerazione il problema del continuo, esprimendo con estrema chiarezza certe caratteristiche di questo oggetto mentale; infatti, (volendo esporre le cose con la nomenclatura odierna) egli precisa che il continuo di una certa dimensione è irriducibile a quelli di dimensione minore, nel senso che non è costituito da questi come la casa è costituita dai suoi mattoni; invece gli elementi di dimensione minore sono sì nel continuo ma come suoi termini. Quindi per esempio il segmento non è costituito da punti, disposti in fila come perle di una collana, ma i punti sono termini del segmento; e se un segmento viene diviso in due mediante un punto intermedio, questo appartiene come termine ad una sola delle due parti.

Questa posizione suona sorprendentemente analoga a quella che prenderà secoli dopo Richard Dedekind, enunciando il postulato di continuità della retta mediante la partizione di tutti i suoi punti in due classi (opportunamente determinate mediante relazioni di ordine) e postulando che esista un punto di separazione, il quale tuttavia appartiene ad una sola delle due classi considerate. Come è noto, la problematica ritornerà alla ribalta con la matematica rinascimentale, ed in particolare con Bonaventura Cavalieri, il quale parlerà di "somma di tutte le linee che costituiscono una superficie"; ed è noto anche che sulla teoria degli indivisibili di Cavalieri e sulla loro natura si è accesa una polemica rimasta ormai classica, sulla quale dovremo tornare nel seguito.

II - LE QUESTIONI CLASSICHE DEL CONTINUO NELLA MATEMATICA DEL RINASCIMENTO.

B. CAVALIERI E GLI INDIVISIBILI, LA SCODELLA DI GALILEO, B. PASCAL E LA SUA POSIZIONE RISPETTO AGLI INDIVISIBILI. IL CALCOLO INFINITESIMALE. NEWTON, LEIBNIZ E C. LA INTUIZIONE DELLA CONTINUIUTÀ FISICA, MATERIALE E IL SUO RUOLO NELLA COSTRUZIONE DEL CALCOLO INFINITESIMALE. RUGGERO BOSCOVICH.

1 - È noto che l'impiego metodico degli strumenti matematici nelle scienze della Natura influì in modo determinante sulla crisi scientifica del Rinascimento; a sua volta, la crescita impetuosa della scienza rese necessaria la costruzione di nuovi strumenti per la matematica, e provocò addirittura il nascere di nuovi rami di questa scienza.
Pensiamo di essere nel vero se diciamo che una circostanza determinante di questa rivoluzione scientifica e culturale è rappresentata anche dalla introduzione nella nostra civiltà occidentale delle convenzioni indiane, a noi trasmesse dagli Arabi, per la rappresentazione dei numeri. Pensiamo che sia giusto vedere in questa introduzione l'origine della matematica moderna; infatti si diede così agli scienziati la possibilità di esprimere con opportuni simboli gli enti della matematica, evitando il ricorso al linguaggio comune, e riducendo la deduzione ad una applicazione delle leggi sintattiche dei simboli adottati.

NOTA. A proposito di continuità, Ernst MACH - Die Mechanik in ihrer Entwikelung historisch-kritich dargestellt, tradotto in italiano da Dionisio Gambioli col titolo: "I principi della Meccanica esposti criticamente e storicamente nel loro sviluppo (Milano, 1909), dice esplicitamente (pag. 129 della edizione italiana): “*Galileo, in tutte le sue deduzioni, segue un principio di una grande fecondità scientifica, che giustamente si può chiamare "principio di continuità", il quale consiste nel modificare, gradatamente e quando è possibile, le circostanze di un caso particolare qualunque, di cui si è potuto fare un'idea chiara, accostandosi sempre, tanto quanto è possibile a questa idea precedentemente acquistata. Nessun altro metodo potrà permettere la comprensione dei fenomeni naturali con più sicurezza e semplicità, con minore fatica o minor sforzo intellettuale*”.

La pagina riportata di Mach si riferisce agli esperimenti che Galileo faceva sulla caduta di gravi; il Mach descrive gli esperimenti di Galileo, che fa scendere un corpo lungo un piano inclinato, in modo che acquisti velocità, e lo fa risalire lungo un altro piano inclinato, posto di fronte al primo; il corpo risale alla stessa altezza che aveva prima della discesa, ma diminuendo sempre di più con continuità l'inclinazione del secondo piano (quello della risalita) si ha che il rallentamento del corpo che risale è sempre minore; quando il secondo piano diventa orizzontale, il corpo non rallenta più, ma prosegue con la stessa velocità che aveva alla fine della discesa. Mach afferma che così Galileo scopre la legge d'inerzia.

Le analisi psicologiche che Mach riporta, riguardano la difficoltà che Galileo, e gli scienziati suoi contemporanei, ebbero nel distaccarsi dalle idee aristoteliche sul moto dei corpi, perché il moto circolare, per ragioni metafisiche, era considerato come il più perfetto dei moti. Ma qui ci interessa analizzare i fondamenti psicologici da cui parte Galileo per questa esperienza basata sulla continuità; ovviamente c'è una presunzione della continuità fisica (per così dire) che, come proprietà fondamentale della materia, viene accettata come procedura di indagine. Precisamente Galileo accetta pacificamente che un cambiamento, considerato come piccolo, delle circostanze sperimentali non possa dare dei bruschi cambiamenti visibili e rilevabili nei fenomeni osservati, e non si pone il problema di definire o precisare dei criteri per giudicare che un cambiamento sia “piccolo”; in altri termini, Galileo accetta come un fondamento per la costruzione di un modello della materia e della meccanica il detto "Natura non facit saltus", ed accetta l'immagine di continuità della materia che ci è fornita dalla elaborazione fantastica della nostra esperienza sensibile.

Ovviamente non intendiamo qui istituire una critica del pensiero galileiano; ci interessa soltanto far rilevare quanto grande sia stata l'importanza dell'immagine del continuo nella costruzione della meccanica razionale classica; il travaglio critico intercorso ci ha reso ben coscienti del fatto che questa immagine costituisce un modello della realtà materiale, che vogliamo descrivere e dominare con gli strumenti della matematica: la maturazione della critica dei fondamenti non ha condotto al ripudio del modello, ma ha reso evidente la necessità di presentarlo come tale, senza attribuirgli una portata assoluta di conoscenza.

III - I PROBLEMI DEL CONTINUO GEOMETRICO NEL SECOLO XIX.

1 - Per inquadrare in modo soddisfacente la problematica del continuo geometrico nel secolo XIX è forse necessario dare un breve cenno delle crisi evolutive che la geometria ha vissuto in tale periodo; crisi che sono state di grande importanza anche per le altre branche della matematica ed hanno stimolato il cammino di questa scienza verso il suo assetto attuale. Tuttavia non tutti gli episodi di crisi evolutiva hanno interessato direttamente il problema del continuo: per esempio la costruzione delle geometrie non euclidee non ha avuto conseguenze dirette sulla problematica del continuo geometrico, anche se ha cambiato radicalmente la concezione della geometria e del suo oggetto. Invece la costruzione della geometria proiettiva ha suscitato dei problemi riguardanti la continuità: è ben noto infatti che Karl G. von Staudt ha fondato "ex novo" la visione della geometria con la sua opera fondamentale "Geometrie der Lage" [*Geometrie der Lage*, (1847); *Beiträge zur Geometrie der Lage*, (1856-60)], opera in cui egli introduce sistematicamente la corrispondenza proiettiva tra gli enti della geometria; è pure noto che tuttavia nella dimostrazione

del teorema fondamentale della proiettività lo Staudt svolge delle considerazioni che sostanzialmente fanno appello al concetto di continuità della retta, e che possono essere rese rigorose soltanto dopo che tale proprietà sia stata esplicitamente enunciata con appositi postulati.

Tuttavia vale la pena di osservare che la questione del continuo geometrico nel secolo XIX è strettamente collegata con quella del concetto di continuità di una funzione. Non intendiamo approfondire qui queste questioni, che, ripetiamo, sono marginali rispetto a quelle del continuo geometrico; tuttavia non possiamo evitare di ricordare che la precisazione del concetto di limite e del concetto di funzione continua è stata realizzata con un continuo superamento del ricorso all'immaginazione per costruire invece degli enunciati linguistici, concettualmente ineccepibili, e logicamente rigorosi. Si potrebbe dire che questo superamento è una delle caratteristiche più importanti della matematica del secolo XIX, e viene raggiunto con la precisazione del concetto di limite, con la dimostrazione che l'ipotesi della continuità di una funzione non è sufficiente per l'esistenza della derivata, ed infine con la celebre costruzione, da parte di Giuseppe Peano, di una curva continua che riempie un intero quadrato.

<LA COSTRUZIONE RIGOROSA DEL CAMPO REALE RICHIEDE UN PROCEDIMENTO INFINITO, COME ABBIAMO VISTO ALL'INIZIO. IL PROBLEMA SI MORDE LA CODA. POSTULATI DI DEDEKIND E DI CANTOR. VARI PRESUPPOSTI NON SEMPRE ESPLICITAMENTE ENUNCIATI. LA DEFINIZIONE "EPSILON DELTA" E QUELLA TOPOLOGICA DI OGGI>.

Come è noto, la precisazione del concetto di limite di una funzione è stata conseguita mediante quella definizione di continuità che alcuni trattatisti chiamano "definizione epsilon-delta", dal nome delle lettere greche tradizionalmente impiegate per indicare l'incremento della variabile indipendente e quello corrispondente della funzione. È superfluo osservare che questa definizione presuppone la possibilità di misurare i segmenti di retta, oppure di misurare le grandezze che sono interessate nella definizione, e che sonno rappresentate da segmenti di retta, nelle ordinarie convenzioni cartesiane. Un'ulteriore generalizzazione del concetto di continuità fa intervenire, come è noto, dei concetti topologici, e quindi fa ricorso soltanto a concetti di appartenenza di certi elementi a certi insiemi. Non possiamo qui addentrarci nell'analisi di queste teorie, e vogliamo dedicare la nostra attenzione alla definizione di continuo geometrico ed alla sua rappresentazione rigorosa.

È noto che questi scopi vennero raggiunti con varie procedure e con vari atteggiamenti; la teorizzazione del continuo geometrico (in particolare della retta, come ce la rappresenta la fantasia, elaborando i dati dei nostri sensi), viene oggi presentata tradizionalmente nei trattati scolastici in due modi, che hanno la loro origine nelle teorizzazioni di Richard Dedekind e di Georg Cantor. Abbiamo già avuto occasione di ricordare Dedekind, e di osservare quanto sia vicino alla concezione classica del continuo; concezione secondo la quale nel continuo potevano esistere degli elementi di specie diversa, che non lo costituiscono, ma che sono termini di elementi della stessa specie del continuo considerato: per esempio punti esistono in un segmento ma non lo costituiscono, e sono termini di segmenti contenuti nel segmento dato. Inoltre un elemento esistente nel continuo appartiene soltanto ad uno di due eventuali sottoinsiemi che lo ammettono come termine comune: così per esempio un punto nel segmento può appartenere ad uno solo dei due segmenti contigui, dei quali è termine comune.

A queste considerazioni, ben note ai lettori dei testi elementari di geometria, vorremmo aggiungere soltanto alcune osservazioni: anzitutto che, nella abituale sistemazione didattica, l'enunciato della continuità viene presentato in relazione alla retta, suddividendo gli infiniti punti di questa in due classi, sul fondamento di una relazione di ordine totale, che si suppone già in qualche modo stabilita. In secondo luogo ci pare chiaro che questo enunciato di continuità faccia intervenire degli insiemi infiniti: precisamente gli insiemi dei punti delle due semirette che vengono prese in considerazione, ed identificate, come abbiamo detto, sulla base di una relazione di ordine totale.

È noto che nell'enunciato di continuità della retta che si fonda sulle idee di Cantor si considera una successione infinita di intervalli "inscatolati", come suol dirsi (tali cioè che ciascuno sia contenuto in tutti quelli che lo precedono nell'ordinamento della successione), e si postula l'esistenza di almeno un punto comune a tutti; se poi la lunghezza degli intervalli tende a zero, si dimostra che tale punto è unico. Anche a proposito di questo enunciato si potrebbe osservare che esso si fonda sulla esistenza di un ordine totale sulla retta, ed inoltre presuppone la possibilità di confrontare e misurare le lunghezze dei segmenti. Infine, anche in questo caso, non si può eliminare il ricorso a concetti ed a procedure che coinvolgono insiemi infiniti.

Esamineremo in seguito altri enunciati che riguardano il concetto di continuità geometrica. I due enunciati che abbiamo preso in considerazione finora ci introducono in modo naturale nel problema della rappresentazione del continuo, con strumenti del linguaggio matematico. È noto che il problema della rappresentazione del continuo geometrico è stato risolto completamente con la costruzione rigorosa del campo reale. Anche questa teoria fa parte ormai degli argomenti classici ed irrinunciabili della didattica matematica, anche elementare, pertanto non ci soffermeremo ad esporla e ci basti osservare ancora una volta che la costruzione rigorosa del campo reale non può fare a meno di algoritmi infiniti. Ciò appare immediatamente evidente a chi consideri per esempio la definizione che si dà di numero reale mediante le sezioni nel campo razionale (definizione che si ispira ovviamente agli enunciati di Dedekind), oppure a chi consideri le definizioni che si danno esplicitamente mediante algoritmi infiniti: coppie di successioni convergenti di numeri razionali, o classi di equivalenza di successioni di Cauchy di numeri cosiffatti, o in altri modi.

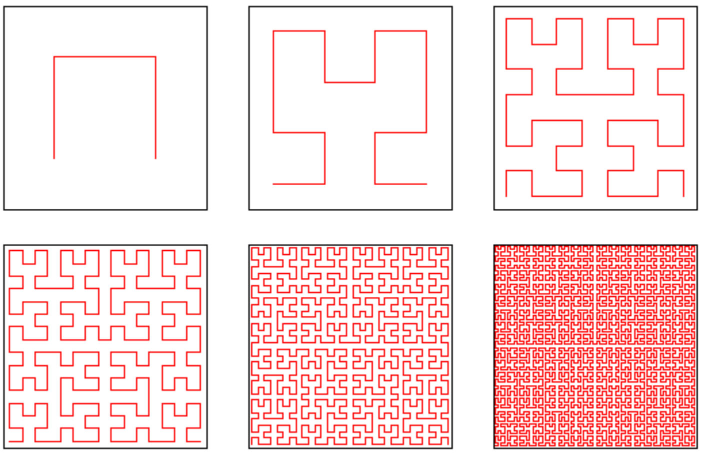
IV - LA PROBLEMATICA DELLA MODERNA TEORIA DEI FRATTALI

<AGGANCIO CON LA REALTÀ (MISURA DELLE LINEE DI CONFINE O DELLE COSTE DI UN PAESE). L'INEVITABILE RICORSO ALLE PROCEDURE INFINITE E LA COSTRUZIONE DI NUOVI INVARIANTI. PER QUANTO RIGUARDA LA DIMENSIONE, GIÀ PEANO AVEVA FATTO OSSERVAZIONI PERTINENTI>.

1 - È noto che la problematica riguardante il continuo geometrico ha risvegliato anche recentemente l'interesse dei ricercatori e del pubblico a causa della nascita di quegli oggetti che vengono ormai comunemente qualificati come "frattali". L'interesse dei non matematici è stato attirato dalla pubblicità che è stata fatta in relazione a figure quasi grottesche che qualcuno ha voluto pittorescamente attribuire ad un preteso nuovo modo di far geometria. Non giudichiamo qui della opportunità di questi tipi di volgarizzazione scientifica, ma non rinunciamo a fare qualche osservazione sul significato e sulla portata di questi nuovi studi.

Ci interessa anzitutto ricordare la problematica concreta in corrispondenza alla quale viene presentata la nascita di questa teoria da parte del suo autore, Benoit Mandelbrot. Infatti in molti dei numerosi libri da lui scritti per presentare la nuova teoria, egli richiama alcune questioni pratiche, che male si inquadrano nelle procedure classiche e che invece possono venir trattate con i nuovi concetti. Si tratta per esempio di dare senso alla procedura di misura della lunghezza delle coste di un'isola (come la Gran Bretagna) o del confine comune di due nazioni vicine. La necessità di dare significato a certi concetti e di definirli in modo preciso ha portato gli autori delle nuove teorie a generalizzare il concetto di dimensione di un oggetto geometrico, accettando che questo carattere abbia anche un valore non intero.

L'idea fondamentale che sta alla base della definizione di questo carattere potrebbe essere brevemente esposta nel modo seguente. Per definire la lunghezza di una curva che chiameremo "regolare " si mette in opera una procedura classica: se pensiamo per esempio ad una circonferenza, tale procedura consiste nell'inscrivere in essa dei poligoni (non necessariamente regolari) convessi, fare tendere a zero la massima lunghezza dei lati di tali poligoni, e quindi far tendere all'infinito il loro numero; la lunghezza del perimetro di tali poligoni, quando si esegua il passaggio al limite, tende ad un valore ben determinato che viene assunto come misura della lunghezza della curva. È ben noto che questa procedura risale ad Archimede, nei suoi tratti essenziali. Tuttavia è possibile costruire degli oggetti che possono essere chiamati "curve", perché ogni loro punto ha coordinate che sono funzioni continue di una variabile reale, per i quali la procedura descritta poco sopra non conduce a risultati finiti. Un oggetto cosiffatto è la celebre curva detta di Von Koch; un altro è la curva di Peano, di cui abbiamo già parlato. Infatti, quando si inscriva in un oggetto di questo genere una poligonale, la lunghezza di questa cresce oltre ogni limite al tendere a zero dei lati della poligonale stessa. È tuttavia possibile determinare una opportuna costante (che può assumere il significato di esponente) in corrispondenza alla quale il limite che si ottiene, al tendere a zero del massimo lato della poligonale, è finito. La costante vale 1 (uno) per le curve che abbiamo chiamate "regolari", e pertanto il suo valore coincide con quello abitualmente assunto come valore della dimensione dell'oggetto "curva". Tuttavia, nei casi più generali, la costante può assumere anche valori non interi, che costituiscono ovviamente delle caratteristiche geometriche dell'oggetto considerato.



Curva di Hilbert (variante della curva di Peano). Da Wikipedia